

Poids de Serre dans la conjecture de Breuil–Mézard

Agnès David

RÉSUMÉ. The first part of the paper is a survey about the Breuil–Mézard Conjecture : objects involved, statements, interpretations, known cases... It ends with a general strategy to compute the intrinsic multiplicities of Serre weights of a local 2-dimensional irreducible modulo p Galois representation. These integers encode the geometry of crystalline deformation spaces, including Hodge–Tate weights exceeding the Fontaine–Laffaille bounds.

This method is a motivation for the rest of the paper. It consists in a complete study of the Serre weights of 2-dimensional irreducible modulo p representations on the one hand, and of some tame inertial Galois types on the other hand. Non generic situations reveal new phenomena (“vanishing” or “multiplicity” of weights, in a combinatorial sense). I present several examples showing the link of these new phenomena with the geometry of some Kisin varieties, that is with Galois deformation rings.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
0. Notations	3
1. Conjecture de Breuil–Mézard	4
1.1. Côté galoisien	4
1.2. Côté automorphe	5
1.3. Énoncés, interprétations et cas connus	7
1.4. Méthode de calcul des multiplicités intrinsèques	8
2. Poids de Serre d’une représentation irréductible de dimension 2	9
2.1. Rappels : congruences définissant $\mathcal{D}(\bar{\rho})$	9
2.2. Explicitation des formules génériques	10
2.3. Formules non génériques et poids de Serre modifiés	11
2.4. Multiplicité combinatoire	15
3. Poids de Serre d’un type modéré	16
4. Anneaux de déformations, variétés de Kisin et poids modifiés : exemples	18

4.1. En degré $f = 2$	18
4.2. En degré $f = 3$	21
Bibliographie	22

Introduction

Soient p un nombre premier, F une extension finie non ramifiée de \mathbb{Q}_p et $\bar{\rho}$ une représentation continue du groupe de Galois absolu de F dans $\mathrm{GL}_2(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

La conjecture de Breuil–Mézard ([BM02], [Kis10], [EG14]) décrit la géométrie (nombre de composantes, singularités, multiplicités...) de la fibre spéciale des déformations potentiellement semi-stables et cristallines de $\bar{\rho}$ en fonction de deux familles de multiplicités, indexées par les poids de Serre du corps F . La première famille relève de la théorie des représentations et est reliée aux contraintes de déformation par la correspondance de Langlands locale. La deuxième famille, formée des *multiplicités intrinsèques*, ne dépend que de la représentation $\bar{\rho}$ et des poids de Serre de F .

Bien que portant sur une représentation galoisienne locale, la conjecture de Breuil–Mézard est connue pour être équivalente à des énoncés de relèvement de modularité pour des représentations globales ([EG14]). Pour \mathbb{Q}_p , sa démonstration par Kisin ([Kis09]) est ainsi intimement liée à celle de la conjecture de Fontaine–Mazur et utilise tout le programme de Langlands p -adique sur \mathbb{Q}_p . Pour une extension non ramifiée générale de \mathbb{Q}_p , elle est établie pour certains cas particuliers de contraintes de déformation et de représentations ([BM14], [GK14]).

D’après la conjecture de Breuil–Mézard, les valeurs des multiplicités intrinsèques régissent la géométrie de toutes les déformations potentiellement semi-stables et cristallines de $\bar{\rho}$. Une conjecture de Kisin ([Kis10], conjecture 2.3.2) prédit que ces valeurs sont toujours 0 ou 1 pour une représentation irréductible. Elle est vérifiée pour les représentations génériques ([BM14]) et les poids de Serre Fontaine–Laffaille réguliers ([GK14], voir définition 1.4).

La première partie (§1) de cet article présente un panorama de la conjecture de Breuil–Mézard : objets en jeu, énoncés, interprétations et cas connus. Elle se termine (§1.4) par le rappel d’une méthode de calcul pour les multiplicités intrinsèques, qui se révèle très efficace. Celle-ci repose d’une part sur la détermination de certains anneaux de déformations potentiellement Barsotti–Tate, à type galoisien modéré de niveau f , d’autre part sur une connaissance précise de la multiplicité des poids de Serre dans ces contraintes de déformation.

La suite de cet article est consacrée à l’étude détaillée de ce deuxième ingrédient. Elle fournit d’abord des formules pour les poids de Serre d’une représentation $\bar{\rho}$ comme ci-dessus, irréductible (§2), et pour ceux d’un type galoisien \mathbf{t} modéré de niveau f (§3). Ces formules généralisent, tout en les reformulant, des descriptions de Breuil et Paškūnas dans les cas génériques ([BP12]). Elles possèdent l’avantage d’une manipulation aisée pour établir des résultats théoriques comme pour les calculs pratiques. Elles s’étendent surtout aux représentations non génériques (§2.3.2).

On dégage de cet examen les nouvelles notions de poids de Serre *modifié* (§2.3.1), dont on établit les propriétés (non régularité, existence pour les représentations non génériques, voir §2.3.3), et de *multiplicité combinatoire* (§2.4).

Ces nouveaux phénomènes ont un pendant du côté des anneaux de déformations galoisiennes et de la géométrie de certaines variétés de Kisin. Ces espaces de modules d'objets de théorie de Hodge p -adique apparaissent naturellement comme intermédiaires dans la détermination des espaces de déformations galoisiennes. On présente dans la dernière partie (§4) plusieurs exemples qui illustrent ce lien profond pour des corps F de petit degré.

L'auteur tient à remercier ici Christophe Breuil, Xavier Caruso et Ariane Mézard pour les riches discussions qui ont entouré le travail présenté dans cet article.

0. Notations

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. On fixe $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p .

Dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$, on note F l'extension finie non ramifiée de \mathbb{Q}_p de degré f , \mathcal{O}_F son anneau d'entiers, k_F son corps résiduel. On note G_F le groupe de Galois absolu $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/F)$ de F et I_F son sous-groupe d'inertie. Soit F' l'unique extension non ramifiée de degré 2 de F dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On lui associe les mêmes notations $\mathcal{O}_{F'}$, $k_{F'}$, $G_{F'}$ et $I_{F'}$.

On fixe également un corps des coefficients E , qui est une extension finie de \mathbb{Q}_p dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On note \mathcal{O}_E son anneau d'entiers, k_E son corps résiduel et ϖ_E une uniformisante fixée. Dans tout le texte, on suppose que le corps E est « assez grand ». En particulier, on suppose que E contient les corps F et F' . On fixe donc un plongement τ'_0 de F' dans E et on note τ_0 sa restriction à F . On note ensuite \mathcal{S} l'ensemble des plongements de F dans E , qu'on identifie à l'ensemble des plongements de k_F dans k_E , et \mathcal{S}' l'analogue pour F' .

Soit G_F^{ab} le plus grand quotient abélien de G_F et \widehat{F}^\times le complété profini de F^\times . La théorie du corps de classes local fournit un isomorphisme de G_F^{ab} dans \widehat{F}^\times qui envoie les éléments de Frobenius géométriques sur les uniformisantes et l'image du sous-groupe d'inertie sur \mathcal{O}_F^\times . Par cet isomorphisme, nous voyons implicitement tout caractère de G_F (resp. de I_F) comme un caractère de F^\times (resp. de \mathcal{O}_F^\times).

On note L le corps obtenu en adjoignant à F une racine $(q-1)$ -ième de $-p$, ${}^{q-1}\sqrt{-p}$. On suppose également que le corps E contient L . Dans l'isomorphisme $G_F^{\text{ab}} \simeq \widehat{F}^\times$, la projection à gauche sur $\text{Gal}(L/F)$ et à droite sur les représentants multiplicatifs $[\mathbb{F}_q^\times] \cong \mathbb{F}_q^\times$ (en envoyant $p^{\mathbb{Z}}(1+p\mathcal{O}_F)$ sur 1) induit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \text{Gal}(L/F) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{O}_F/p)^\times = k_F^\times \\ g & \longmapsto & \frac{g({}^{q-1}\sqrt{-p})}{{}^{q-1}\sqrt{-p}} \end{array}$$

par lequel on voit tout caractère de k_F^\times comme un caractère de $\text{Gal}(L/F)$ et réciproquement.

On note ω_f le caractère fondamental de niveau f de G_F dans k_E^\times induit sur G_F par l'isomorphisme ci-dessus et le plongement $\tau_{0|k_F^\times}$. On note de façon analogue ω_{2f} le caractère fondamental de niveau $2f$ de $G_{F'}$ dans k_E^\times associé au plongement τ'_0 . Pour tout plongement τ dans \mathcal{S} (resp. τ' dans \mathcal{S}'), on note ω_τ (resp. $\omega_{\tau'}$) le caractère fondamental de niveau f (resp. $2f$) de G_F (resp. $G_{F'}$) induit par τ (resp. τ'). On note ε de G_F dans \mathbb{Z}_p^\times le caractère cyclotomique p -adique et ω sa réduction modulo p . Pour θ dans k_E^\times , on note $\text{nr}'(\theta)$ l'unique caractère non ramifié de $G_{F'}$ dans k_E^\times qui envoie le Frobenius arithmétique de $G_{F'}$ sur θ .

Enfin, dans tout le texte, $\bar{\rho}$ désigne une représentation *irréductible* de G_F dans $\text{GL}_2(k_E)$.

1. Conjecture de Breuil–Mézard

La conjecture de Breuil–Mézard prédit l'égalité entre deux entiers naturels associés à la représentation galoisienne $\bar{\rho}$: la multiplicité galoisienne et la multiplicité automorphe. On présente dans cette première partie les objets en jeu dans la conjecture (§1.1, §1.2), puis son énoncé et les cas déjà connus (§1.3), et enfin une méthode de calcul des multiplicités intrinsèques, entiers dont l'existence est prédite par la conjecture et qui codent la géométrie des déformations cristallines de $\bar{\rho}$.

1.1. Côté galoisien.

1.1.1. *Anneaux de déformations potentiellement cristallines et semi-stables.* On s'intéresse à des relèvements en caractéristique nulle de la représentation $\bar{\rho}$ qui possèdent la propriété géométrique naturelle d'être potentiellement semi-stables, voire cristallins. On rappelle ici les objets associés aux représentations potentiellement semi-stables qui interviennent dans les énoncés de la conjecture.

Soient E' une extension finie de E et ρ une représentation continue de G_F sur un E' -espace vectoriel de dimension 2, potentiellement semi-stable. Deux données lui sont naturellement associées : son type de Hodge et son type galoisien.

Le *type de Hodge p -adique* de ρ , noté \mathbf{v} dans ce texte, est décrit par la donnée, pour tout plongement τ de F dans E , d'un couple (w_τ, k_τ) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{\geq 2}$. Cette notation correspond à des poids de Hodge–Tate $(w_\tau, w_\tau + k_\tau - 1)_{\tau \in \mathcal{S}}$ pour la représentation ρ (voir [Kis10] §1.1.3 et [BM14] §2).

Le *type galoisien* de ρ est une représentation du sous-groupe d'inertie I_F sur un $\overline{\mathbb{Q}}_p$ -espace vectoriel de dimension 2, à noyau ouvert, et qui s'étend à une représentation de Weil–Deligne de F ; on le note \mathbf{t} . Il mesure le défaut de semi-stabilité de ρ , au sens suivant : ρ est semi-stable sur F si et seulement si son type galoisien est trivial. De plus, si ρ est potentiellement semi-stable et de type galoisien non scalaire, alors ρ est potentiellement cristalline.

Dans tout ce texte, on suppose que le corps E est choisi assez gros, de sorte que tous les types de Hodge et galoisiens considérés sont définis sur E .

Pour des données \mathbf{v} et \mathbf{t} comme ci-dessus, on fixe pour toute la suite du texte un caractère continu ψ de G_F dans \mathcal{O}_E^\times vérifiant, en restriction à l'inertie : $\psi|_{I_F} = (\det \mathbf{t}) \prod_{\tau \in \mathcal{S}} \varepsilon_\tau^{2w_\tau + k_\tau - 2}$. Ce choix étant fait une fois pour toute, on omettra parfois ψ dans les notations.

Une représentation potentiellement semi-stable ρ comme ci-dessus est dite de type $(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \psi)$ si elle est de déterminant $\psi\varepsilon$, ses poids de Hodge–Tate sont $(w_\tau, w_\tau + k_\tau - 1)_{\tau \in \mathcal{S}}$ et la restriction à l'inertie I_F de la représentation de Weil–Deligne qui lui est associée est isomorphe au type galoisien \mathbf{t} .

Soit $R_{\mathfrak{u}}^\psi(\bar{\rho})$ la \mathcal{O}_E -algèbre locale complète noethérienne de corps résiduel k_E paramétrant les déformations de $\bar{\rho}$ sur de telles \mathcal{O}_E -algèbres, de déterminant $\psi\varepsilon$. Les anneaux, quotients de $R_{\mathfrak{u}}^\psi(\bar{\rho})$, paramétrant les déformations de $\bar{\rho}$ potentiellement semi-stables et de type $(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \psi)$ ont été initialement étudiés dans [?]. Les résultats de [Kis10] (théorèmes 1.2.1 et 1.2.2) et [GK14] (proposition 2.1.1) se résument ainsi (voir aussi [BM14] §2 pour une description explicite) : il existe un unique quotient (possiblement nul) $R_{\text{st}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ (resp. $R_{\text{cr}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$) de $R_{\mathfrak{u}}^\psi(\bar{\rho})$ vérifiant

- (i) $R_{\text{st}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ (resp. $R_{\text{cr}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$) est réduit et sans p -torsion ;
- (ii) pour toute extension finie E' de E et tout morphisme de \mathcal{O}_E -algèbres x de $R_{\mathfrak{u}}^\psi(\bar{\rho})$ dans E' , la E' -représentation de dimension 2 de G_F induite par x est potentiellement semi-stable

(resp. cristalline) de type $(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \psi)$ si et seulement si x se factorise par $R_{\text{st}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ (resp. $R_{\text{cr}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$).

Lorsque l'anneau $R_{\text{st}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ (resp. $R_{\text{cr}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$) est non nul, il est équidimensionnel de dimension $1 + f$.

1.1.2. *Multiplicité de Hilbert–Samuel.* Soit A un anneau local noethérien, de dimension d et d'idéal maximal \mathfrak{m}_A . Il existe un unique polynôme $P_A(X)$ vérifiant : pour tout entier naturel n assez grand, la longueur du A -module A/\mathfrak{m}_A^{n+1} est égale à $P_A(n)$. Le polynôme $P_A(X)$ est de degré au plus d et son coefficient de degré d multiplié par $d!$ est un entier naturel, appelé la *multiplicité de Hilbert–Samuel* de A et noté $e(A)$ (voir [Mat86] §13). La multiplicité de Hilbert–Samuel mesure le nombre de composantes irréductibles de $\text{Spec } A$, ainsi que leurs singularités et multiplicités éventuelles.

EXEMPLES 1.1.

- Pour tout r dans \mathbb{N}^* , on a : $e(k_E[[X_1, \dots, X_r]]) = 1$.
- On a : $e(k_E[[X, Y]]/(XY)) = 2$.

Les multiplicités galoisiennes qui apparaissent dans la conjecture de Breuil–Mézard sont les multiplicités de Hilbert–Samuel des fibres spéciales des anneaux de déformations définis en §1.1.1.

DÉFINITION 1.2 (Multiplicité galoisienne). Soient $\bar{\rho}$, \mathbf{v} et \mathbf{t} comme dans la partie 1.1.1. On appelle *multiplicité galoisienne semi-stable* (resp. *cristalline*) et on note $\mu_{\text{gal}}^{\text{st}}(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ (resp. $\mu_{\text{gal}}^{\text{cr}}(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$) la multiplicité de Hilbert–Samuel de l'anneau $R_{\text{st}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})/(\varpi_E)$ (resp. $R_{\text{cr}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})/(\varpi_E)$) :

- $\mu_{\text{gal}}^{\text{st}}(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = e\left(R_{\text{st}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})/(\varpi_E)\right)$;
- $\mu_{\text{gal}}^{\text{cr}}(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = e\left(R_{\text{cr}}^\psi(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})/(\varpi_E)\right)$.

1.2. Côté automorphe.

1.2.1. *Poids de Serre.* On appelle *poids de Serre* de F toute (classe d'isomorphisme de) représentation irréductible de $\text{GL}_2(k_F)$ sur un k_E -espace vectoriel. Toute représentation lisse irréductible de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur un k_E -espace vectoriel se factorise par un poids de Serre de F et on identifiera dans la suite ces deux notions. Les poids de Serre de F sont en nombre fini et classifiés de la manière suivante.

- (i) Soit $(r_\tau, s_\tau)_{\tau \in \mathcal{S}}$ dans $([0; p-1]^2)^{\mathcal{S}}$ la donnée, pour chaque plongement de F dans E , d'un couple d'entiers entre 0 et $p-1$. Alors la représentation

$$\bigotimes_{\tau \in \mathcal{S}} \left((\text{Sym}^{r_\tau} k_E^2)^\tau \otimes_{k_E} \tau \circ \det^{s_\tau} \right),$$

où $\text{GL}_2(k_F)$ agit sur le facteur $(\text{Sym}^{r_\tau} k_E^2)^\tau$ par le plongement τ de k_F dans k_E , est un poids de Serre de F .

- (ii) Tout poids de Serre de F est isomorphe à un poids de cette forme.
 (iii) Cette écriture est unique lorsque l'on suppose de plus que les entiers $(s_\tau)_{\tau \in \mathcal{S}}$ ne sont pas tous égaux à $p-1$.

Dans la suite du texte, on désignera donc souvent un poids de Serre par la donnée des entiers $(r_\tau, s_\tau)_{\tau \in \mathcal{S}}$.

NOTATION 1.3. On note \mathcal{D}_F l'ensemble des poids de Serre de F .

On rappelle enfin deux notions de régularité pour les poids de Serre ([GK14], définition 2.1.8).

DÉFINITION 1.4 (Poids de Serre (Fontaine–Laffaille) régulier). Un poids de Serre $(r_\tau, s_\tau)_{\tau \in \mathcal{S}}$ de F est dit :

- *régulier* si tous les entiers r_τ sont dans $\llbracket 0, p-2 \rrbracket$;
- *Fontaine–Laffaille régulier* si tous les entiers r_τ sont dans $\llbracket 0, p-3 \rrbracket$.

1.2.2. *Poids de Serre d'une représentation irréductible.* Dans [BDJ10], Buzzard, Diamond et Jarvis associent à une représentation $\bar{\rho}$ un ensemble $\mathcal{D}(\bar{\rho})$ de poids de Serre. Cet ensemble intervient notamment dans l'énoncé de la conjecture de modularité de Serre pour les corps de nombres totalement réels. On en rappelle ici la définition.

Comme $\bar{\rho}$ est irréductible, il existe un caractère ξ de $G_{F'}$ dans $\bar{\mathbb{F}}_p^\times$ tel que $\bar{\rho}$ est l'induite de $G_{F'}$ à G_F de ξ . L'ensemble $\mathcal{D}(\bar{\rho})$ ne dépend que de la restriction de ξ au sous-groupe d'inertie de G_F et est défini de la manière suivante.

DÉFINITION 1.5 (Poids de Serre de $\bar{\rho}$, [BDJ10] §3.1). L'ensemble $\mathcal{D}(\bar{\rho})$ est l'ensemble des poids de Serre $(r_\tau, s_\tau)_{\tau \in \mathcal{S}}$ tels qu'il existe une partie \mathcal{J} de \mathcal{S}' de cardinal f , dont la restriction à F donne \mathcal{S} et qui vérifie :

$$\xi|_{I_{F'}} = \prod_{\tau' \in \mathcal{J}} \omega_{\tau'}^{1+r_{\tau'}|_{F'}} \prod_{\tau \in \mathcal{S}} \omega_\tau^{s_\tau}.$$

1.2.3. *Multiplicité d'un poids de Serre dans le type de déformation.* Dans cette partie, on explique comment associer à un type de déformation (\mathbf{v}, \mathbf{t}) comme dans la partie §1.1.1 et à un poids de Serre σ une multiplicité $m_{\mathbf{v}, \mathbf{t}}(\sigma)$ (dans \mathbb{N}).

Soit d'abord \mathbf{t} un type galoisien. On associe à \mathbf{t} deux représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur un E -espace vectoriel de dimension finie, lisses et irréductibles, $\sigma_{\mathrm{st}}(\mathbf{t})$ et $\sigma_{\mathrm{cr}}(\mathbf{t})$, données par le théorème ci-dessous.

Pour $\tilde{\mathbf{t}}$ une représentation de Weil–Deligne de F sur un $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -espace vectoriel de dimension 2, Frobenius semi-simple, on note $\pi(\tilde{\mathbf{t}})$ la $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -représentation lisse et admissible de $\mathrm{GL}_2(F)$ associée à $\tilde{\mathbf{t}}$ par la correspondance de Langlands locale.

THÉORÈME 1.6 (Henriart, appendice de [BM02]). *Soit \mathbf{t} un type galoisien comme dans la partie 1.1.1. Il existe une unique $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -représentation $\sigma_{\mathrm{st}}(\mathbf{t})$ (resp. $\sigma_{\mathrm{cr}}(\mathbf{t})$) lisse, irréductible, de dimension finie, de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ telle que, pour toute représentation de Weil–Deligne $\tilde{\mathbf{t}}$ de F sur un $\bar{\mathbb{Q}}_p$ -espace vectoriel de dimension 2, Frobenius semi-simple, on a :*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{t}}|_{I_F} \simeq \mathbf{t} &\iff \sigma_{\mathrm{st}}(\mathbf{t}) \text{ est une sous-représentation de } \pi(\tilde{\mathbf{t}})|_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \\ (\text{resp. } N \equiv 0 \text{ sur } \tilde{\mathbf{t}} \text{ et } \tilde{\mathbf{t}}|_{I_F} \simeq \mathbf{t}) &\iff \sigma_{\mathrm{cr}}(\mathbf{t}) \text{ est une sous-représentation de } \pi(\tilde{\mathbf{t}})|_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)}. \end{aligned}$$

Les représentations $\sigma_{\mathrm{st}}(\mathbf{t})$ et $\sigma_{\mathrm{cr}}(\mathbf{t})$ coïncident, sauf lorsque le type galoisien \mathbf{t} est scalaire. On a en particulier $\sigma_{\mathrm{cr}}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Dans le choix du corps E assez grand, on suppose que les représentations $\sigma_{\mathrm{st}}(\mathbf{t})$ et $\sigma_{\mathrm{cr}}(\mathbf{t})$ sont définies sur E .

Soit maintenant \mathbf{v} un type de Hodge p -adique comme dans la partie 1.1.1. On associe également à \mathbf{v} une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur un E -espace vectoriel de dimension finie, par la formule explicite suivante :

$$\sigma(\mathbf{v}) \stackrel{\text{déf}}{=} \bigotimes_{\tau \in \mathcal{S}} \left(\left(\mathrm{Sym}^{k_\tau - 2} E^2 \right)^\tau \otimes_E \tau \circ \det^{w_\tau} \right),$$

où $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ agit sur le facteur $\left(\mathrm{Sym}^{k_\tau - 2} E^2 \right)^\tau$ par le plongement τ de F dans E .

On considère alors dans le produit tensoriel $\sigma_{\text{st}}(\mathbf{t}) \otimes_E \sigma(\mathbf{v})$ (resp. $\sigma_{\text{cr}}(\mathbf{t}) \otimes_E \sigma(\mathbf{v})$) un sous- \mathcal{O}_E -réseau $L_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{st}}$ (resp. $L_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{cr}}$) stable par l'action de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$. La semi-simplifiée de la réduction modulo ϖ_E de $L_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{st}}$ (resp. $L_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{cr}}$) est indépendante du choix du réseau $L_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{st}}$ (resp. $L_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{cr}}$); on la note $\overline{\sigma_{\text{st}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}}$ (resp. $\overline{\sigma_{\text{cr}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}}$).

Les représentations $\overline{\sigma_{\text{st}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}}$ et $\overline{\sigma_{\text{cr}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}}$ sont des représentations lisses de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur un k_E -espace vectoriel de dimension finie. Elles se décomposent donc en somme de poids de Serre de F , éventuellement avec multiplicité.

DÉFINITION 1.7 ([BM14]). Soient σ un poids de Serre de F , \mathbf{v} et \mathbf{t} comme précédemment. On appelle multiplicité semi-stable (resp. cristalline) de σ dans le type de déformation (\mathbf{v}, \mathbf{t}) , et on note $m_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{st}}(\sigma)$ (resp. $m_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{cr}}(\sigma)$) la multiplicité de σ dans la représentation $\overline{\sigma_{\text{st}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}}$ (resp. $\overline{\sigma_{\text{cr}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}}$) :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\text{st}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}} &= \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}_F} \sigma^{m_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{st}}(\sigma)} \\ \left(\text{resp. } \overline{\sigma_{\text{cr}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}} \right) &= \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{D}_F} \sigma^{m_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{cr}}(\sigma)}. \end{aligned}$$

NOTATIONS 1.8. On note $\mathcal{D}_{\text{st}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})$ (resp. $\mathcal{D}_{\text{cr}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})$) l'ensemble des poids de Serre de F apparaissant dans $\overline{\sigma_{\text{st}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}}$ (resp. $\overline{\sigma_{\text{cr}}(\mathbf{v}, \mathbf{t})}^{\text{ss}}$), c'est-à-dire ceux pour lesquels la multiplicité $m_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{st}}(\sigma)$ (resp. $m_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{cr}}(\sigma)$) est non nulle.

1.3. Énoncés, interprétations et cas connus.

1.3.1. Énoncés. Les premiers énoncés et cas connus de la conjecture de Breuil-Mézard, pour \mathbb{Q}_p , se trouvent dans [BM02]. Kisin en a ensuite généralisé la formulation, pour \mathbb{Q}_p et les extensions finies de \mathbb{Q}_p , dans [Kis10]. Il en existe également des versions raffinées ([BM14]), géométriques, ainsi que des énoncés pour GL_n ([EG14], sous l'hypothèse d'existence de types généralisant les $\sigma_{\text{st}}(\mathbf{t})$ et $\sigma_{\text{cr}}(\mathbf{t})$ de §1.2.3 pour GL_n).

CONJECTURE DE BREUIL-MÉZARD ([BM02], [Kis10]). Il existe une famille d'entiers naturels $(m_{\bar{\rho}}(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{D}_F}$, ne dépendant que de $\bar{\rho}$ et des poids de Serre de F , tels que, pour tout type de Hodge p -adique \mathbf{v} et tout type galoisien \mathbf{t} , on a :

$$\mu_{\text{gal}}^{\text{st}}(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_F} m_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{st}}(\sigma) m_{\bar{\rho}}(\sigma)$$

et

$$\mu_{\text{gal}}^{\text{cr}}(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{D}_F} m_{\mathbf{v},\mathbf{t}}^{\text{cr}}(\sigma) m_{\bar{\rho}}(\sigma).$$

Dans l'énoncé de la conjecture, le membre de droite de l'égalité est appelé *multiplicité automorphe*. On appelle l'entier naturel $m_{\bar{\rho}}(\sigma)$ la *multiplicité intrinsèque* du poids de Serre σ dans la représentation $\bar{\rho}$.

On note que les deux déclinaisons, semi-stables et cristallines, de la conjecture ne diffèrent que pour les types galoisiens \mathbf{t} scalaires (notamment, triviaux). Dans ces cas, la conjecture prédit néanmoins que les mêmes multiplicités intrinsèques satisfont les deux égalités.

1.3.2. Interprétations. On remarque que les poids de Serre de F sont en nombre fini, alors qu'il y a une infinité de choix possibles pour le type de déformation (\mathbf{v}, \mathbf{t}) . La conjecture prédit en fait l'unicité des valeurs des multiplicités intrinsèques et en fournit une interprétation en terme d'anneaux de déformations.

En effet, un poids de Serre σ étant fixé, on peut choisir un type de Hodge p -adique explicite \mathbf{v}_σ tel que $\overline{\sigma_{\text{cr}}(\mathbf{v}_\sigma, \mathbb{1})}^{\text{ss}}$ est réduit à σ . La version cristalline de la conjecture pour le

type de déformation $(\mathbf{v}_\sigma, \mathbf{1})$ donne alors que $m_{\bar{\rho}}(\sigma)$ est la multiplicité galoisienne $\mu_{\text{gal}}^{\text{cr}}(\mathbf{v}_\sigma, \mathbf{1}, \bar{\rho})$. La multiplicité intrinsèque du poids σ dans la représentation $\bar{\rho}$ décrit ainsi la géométrie de la fibre spéciale de l’anneau des déformations cristallines de $\bar{\rho}$, à poids de Hodge–Tate fixés par le relèvement \mathbf{v}_σ de σ . En particulier, lorsque la multiplicité intrinsèque est 1, cette fibre spéciale est formellement lisse.

Une interprétation de la conjecture de Breuil–Mézard consiste donc à dire que toutes les multiplicités galoisiennes, qui décrivent la géométrie des déformations potentiellement semi-stables et cristallines de $\bar{\rho}$, peuvent s’exprimer en fonction des multiplicités intrinsèques (en nombre fini et ayant elles-mêmes une interprétation géométrique, cristalline) et de données combinatoires relevant de la théorie des représentations via la correspondance de Langlands locale (les multiplicités $m_{\mathbf{v}, \mathbf{t}}^{\text{st}}(\sigma)$ ou $m_{\mathbf{v}, \mathbf{t}}^{\text{cr}}(\sigma)$).

1.3.3. *Cas connus.* Lorsque le corps de base est \mathbb{Q}_p , la conjecture a été démontrée par Kisin (à l’exclusion de quelques représentations $\bar{\rho}$) dans [Kis09]. Sa démonstration de Kisin utilise tout le programme de Langlands p -adique pour \mathbb{Q}_p et des arguments globaux, qui révèlent le lien étroit entre la conjecture de Breuil–Mézard et des énoncés de relèvement de modularité, comme la conjecture de Fontaine–Mazur. Les versions raffinées ([BM14]) et géométriques ([EG14]) sont également connues pour \mathbb{Q}_p ; leurs démonstrations utilisent la version numérique démontrée par Kisin et n’en constituent pas une nouvelle preuve. Dans [Paš15] Paškūnas propose également une démonstration purement locale de la conjecture pour \mathbb{Q}_p .

Pour une extension non ramifiée de \mathbb{Q}_p , la conjecture n’est connue que dans des cas particulier de type de déformation (\mathbf{v}, \mathbf{t}) : type de Hodge $(0, 2)_{\tau \in \mathcal{S}}$ et type galoisien scindé, modéré de niveau f ([BM14]), puis quelconque ([GK14]). Sous certaines hypothèses, dont une forme forte de la partie poids de la conjecture de Serre, Emerton et Gee établissent dans [EG14] des équivalences entre la conjecture numérique, la conjecture géométrique et des énoncés de relèvement de modularité (y compris pour GL_n).

Pour \mathbb{Q}_p , et pour des représentations génériques pour une extension non ramifiée de \mathbb{Q}_p , la multiplicité intrinsèque vaut 1 pour les poids dans $\mathcal{D}(\bar{\rho})$ et 0 pour les autres (voir notamment dans [BM14] les premiers cas de la conjecture raffinée). D’après [GK14] (théorème A), on sait que, pour toute représentation irréductible, la multiplicité intrinsèque est non nulle pour les poids dans $\mathcal{D}(\bar{\rho})$ et nulle pour les autres. On sait de plus que les poids Fontaine–Laffaille réguliers (voir définition 1.4) ont multiplicité intrinsèque (0 ou) 1. Plus généralement, Kisin conjecture dans [Kis10] (conjecture 2.3.2) que les poids de Serre d’une représentation irréductible ont tous pour multiplicité intrinsèque 1.

1.4. Méthode de calcul des multiplicités intrinsèques. Il est naturel de chercher à calculer toutes les multiplicités intrinsèques possibles pour : tester la conjecture de Kisin sur leurs valeurs, démontrer de nouveaux cas de la conjecture de Breuil–Mézard, accéder à des informations sur la géométrie des déformations cristallines de $\bar{\rho}$...

Une méthode déjà employée avec succès consiste à expliciter les égalités prédites par la conjecture de Breuil–Mézard pour certains types de déformation (\mathbf{v}, \mathbf{t}) , pour lesquels les données $\mu_{\text{gal}}(\mathbf{v}, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ et $m_{\mathbf{v}, \mathbf{t}}(\sigma)$ sont calculables. On obtient ainsi des conditions sur les multiplicités intrinsèques, qui permettent d’établir leur valeur.

Dans la suite du texte, on fixe le type de Hodge p -adique \mathbf{v} égal à $\mathbf{v}_0 = (0, 2)_{\tau \in \mathcal{S}}$; ce choix correspond à des poids de Hodge–Tate $(0, 1)_{\tau \in \mathcal{S}}$ (cas potentiellement Barsotti–Tate). Ce choix étant fixé, on omettra parfois la dépendance en \mathbf{v}_0 dans les notations.

Comme type galoisien \mathbf{t} , on considère la somme de deux caractères $\eta \oplus \eta'$, où η et η' sont deux caractères de I_F dans \mathcal{O}_E^\times , distincts, modérément ramifiés de niveau f et qui s'étendent à G_F . De tels types n'étant pas scalaires, les anneaux $R_{\text{st}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ et $R_{\text{cr}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$, ainsi que les représentations $\sigma_{\text{st}}(\mathbf{t})$ et $\sigma_{\text{cr}}(\mathbf{t})$, coïncident. On omettra donc parfois dans la suite les indications st et cr dans les notations.

La détermination des multiplicités $\mu_{\text{gal}}(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ pour ces contraintes de déformation passe par la paramétrisation par des objets de théorie de Hodge p -adique (modules fortement divisibles ([BM14]), modules de Breuil–Kisin ([CDM14])) des relèvements de $\bar{\rho}$ encodés par les anneaux $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$. Côté automorphe, le calcul des multiplicités intrinsèques nécessite une compréhension fine de l'ensemble $\mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{v}_0, \mathbf{t})$ des poids de Serre associés à la fois à la représentation $\bar{\rho}$ et au type de déformation $(\mathbf{v}_0, \mathbf{t})$. Cette question fait l'objet de la suite de cet article.

La version géométrique de la conjecture de Breuil–Mézard constitue une autre motivation pour l'étude des poids communs $\mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{v}_0, \mathbf{t})$. D'après celle-ci, les composantes irréductibles de la fibre spéciale de l'anneau $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ se répartissent entre les poids de $\mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{v}_0, \mathbf{t})$. De plus, les composantes irréductibles associées à un poids de Serre σ dans cet ensemble donnent la fibre spéciale des déformations cristallines $R_{\text{cr}}^\psi(\mathbf{v}_\sigma, \mathbf{1}, \bar{\rho})$ à poids de Hodge–Tate prescrits par σ . Une prochaine étape est donc de relier les propriétés de l'ensemble $\mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{v}_0, \mathbf{t})$, et notamment les nouveaux phénomènes mis en évidence en §2 et §3, à la géométrie des espaces de déformations galoisiennes (voir §4 pour des exemples).

2. Poids de Serre d'une représentation irréductible de dimension 2

Dans cette partie, on rappelle tout d'abord (§2.1) la définition de [BDJ10] de l'ensemble $\mathcal{D}(\bar{\rho})$ des poids de Serre de la représentation $\bar{\rho}$. Pour une représentation générique, cet ensemble est décrit par des formules explicites dans [BP12]. On en donne ici une description alternative (§2.2), qui présente l'avantage de se généraliser aux représentations non génériques (§2.3.2). De cette généralisation se dégage la notion de poids de Serre *modifié* (§2.3.1), dont on établit ensuite les propriétés : existence pour les représentations non génériques, non régularité, etc. (§2.3.3). Les poids modifiés peuvent posséder une *multiplicité combinatoire*, examinée dans la partie 2.4.

Pour toute la suite du texte, on fixe un plongement τ'_0 de F' dans E relevant le plongement τ_0 de F dans E déjà fixé et on note ω_{2f} le caractère fondamental de G_F dans \mathcal{O}_E^\times associé.

2.1. Rappels : congruences définissant $\mathcal{D}(\bar{\rho})$. La représentation irréductible $\bar{\rho}$ s'écrit sous la forme $\text{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_{2f}^h \cdot \text{nr}'(\theta)) \otimes \omega_f^d$, avec h un entier dans $\llbracket 1; p^f \rrbracket$, d un entier relatif et θ un élément de k_E^\times . Cette écriture n'est pas unique, en raison de l'isomorphisme $\text{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_{2f}^{p^f+1-h}) \simeq \text{Ind}_{G_{F'}}^{G_F}(\omega_{2f}^h) \otimes \omega_f^{1-h}$. On en fixe une pour toute la suite du texte.

La définition 1.5 des poids de Serre $\mathcal{D}(\bar{\rho})$ de $\bar{\rho}$ amène à considérer l'ensemble des parties de \mathcal{S}' (les plongements de F' dans E) de cardinal f dont la restriction à F donne \mathcal{S} (les plongements de F dans E). Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble $\{0, 1\}^f$ par l'application suivante :

$$\begin{aligned} \{0, 1\}^f &\longrightarrow \{ \mathcal{J} \subset \mathcal{S}' \mid |\mathcal{J}| = f \text{ et } \mathcal{J}|_F = \mathcal{S} \} \\ \varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{f-1}) &\longmapsto \mathcal{J}_\varepsilon := \{ \tau'_0 \circ \text{frob}_{F'}^{\varepsilon_0}, \dots, \tau'_0 \circ \text{frob}_{F'}^{\varepsilon_{f-1}} \}. \end{aligned}$$

De plus, on vérifie que l'égalité de la définition 1.5 pour la partie \mathcal{J}_ε possède une solution $(r_\tau, s_\tau)_{\tau \in \mathcal{S}}$ dans $(\llbracket 0; p-1 \rrbracket^2)^{\mathcal{S}}$ si et seulement si la congruence

$$(\mathcal{C}_\varepsilon(h)) \quad h \equiv \sum_{i=0}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^i (1 + r_i) \pmod{p^f + 1}$$

a une solution $(r_i)_{i \in \llbracket 0; f-1 \rrbracket}$ dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$. Lorsque c'est le cas, les entiers $(s_i)_{i \in \llbracket 0; f-1 \rrbracket}$ dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$ sont en effet uniquement déterminés par h , d , ε et la famille $(r_i)_{i \in \llbracket 0; f-1 \rrbracket}$: ils sont donnés par le développement en base p de l'unique représentant dans $\llbracket 0; p^{f-1} - 2 \rrbracket$ de la classe modulo $p^f - 1$ de l'entier

$$d - \sum_{i=0}^{f-1} \varepsilon_i p^i (1 + r_i) + \frac{h - \sum_{i=0}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^i (1 + r_i)}{p^f + 1}.$$

Dans la suite du texte, on désigne donc souvent un poids de Serre par la donnée des entiers $(r_i)_{i \in \llbracket 0; f-1 \rrbracket}$, en omettant les $(s_i)_{i \in \llbracket 0; f-1 \rrbracket}$.

Si la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ a une solution dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$, celle-ci est unique. Il arrive néanmoins qu'une telle solution n'existe pas (dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$). Précisément, pour ε dans $\{0, 1\}^f$, on note

$$D_\varepsilon = 1 + \sum_{\varepsilon_i=0} p^{i+1} - \sum_{\varepsilon_i=1} p^i.$$

Alors la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ a une solution dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$ si et seulement si h n'est pas congru à D_ε modulo $p^f + 1$.

Lorsque ε varie dans $\{0, 1\}^f$, les classes des D_ε modulo $p^f + 1$ qui sont non nulles sont deux à deux distinctes. Si le degré f est pair, tous les D_ε sont non nuls modulo $p^f + 1$. Si f est impair, D_ε est divisible par $p^f + 1$ si et seulement si ε vaut 1010...101 ou 0101...010. Ainsi, h étant fixé dans $\llbracket 1; p^f \rrbracket$, il existe au plus un mot ε dans $\{0, 1\}^f$ pour lequel la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ n'a pas de solution dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$. Si f est pair, il existe 2^f entiers h dans $\llbracket 1; p^f \rrbracket$ pour lesquels ce phénomène se produit. Si f est impair, il y en a $2^f - 2$ (voir [BDJ10], proposition 3.1).

2.2. Explicitation des formules génériques. Pour déterminer les poids de Serre $\mathcal{D}(\bar{\rho})$ de la $\bar{\rho}$, il s'agit donc de résoudre les congruences $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ lorsque le mot ε parcourt $\{0, 1\}^f$.

L'entier h étant dans $\llbracket 1; p^f \rrbracket$, il existe un unique f -uplet $(r_0, r_1, \dots, r_{f-1})$ dans l'ensemble $\llbracket 0; p-1 \rrbracket \times \llbracket -1; p-2 \rrbracket^{f-1}$ vérifiant $h = \sum_{i=0}^{f-1} p^i (1 + r_i)$. On appelle ce f -uplet « poids initial » de h ou de $\bar{\rho}$ (bien qu'il ne fournisse pas toujours un poids de Serre de la représentation...).

On rappelle ([BP12], définition 11.7) que la représentation $\bar{\rho}$ est dite *générique* si le poids initial « ne touche pas les bords des intervalles », c'est-à-dire est dans $\llbracket 1; p-2 \rrbracket \times \llbracket 0; p-3 \rrbracket^{f-1}$.

D'après [BP12], une représentation irréductible générique possède exactement 2^f poids de Serre, c'est-à-dire que toutes les congruences $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ ont une solution et que les solutions sont deux à deux distinctes. Breuil et Paškūnas donnent également ([BP12], lemme 11.4) des formules explicites permettant de calculer tous les poids de Serre en appliquant des transformations au poids initial.

On présente ici une expression différente (bien qu'équivalente) de ces transformations. Elle présente deux avantages principaux. Tout d'abord, elle fournit un lien direct et explicite entre un poids de Serre et la (ou les) congruence(s) $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ dont il est solution. D'autre part, elle

permet d'isoler des propriétés (par exemple, régularité ou Fontaine–Laffaille régularité) propres à un indice i fixé entre 0 et $f - 1$.

Soit ε dans $\{0, 1\}^f$; à tout f -uplet d'entiers $x = (x_0, \dots, x_{f-1})$ on associe un f -uplet $r^\varepsilon(x)$ défini par les formules

$$\begin{cases} r_0^\varepsilon(x_0) &= (-1)^{\varepsilon_0}(x_0 - \varepsilon_{f-1}) + \varepsilon_0(p - 2); \\ \forall i \in \llbracket 1; f - 1 \rrbracket, & r_i^\varepsilon(x_i) = (-1)^{\varepsilon_i}(x_i + \varepsilon_{i-1}) + \varepsilon_i(p - 2). \end{cases}$$

Ces formules sont équivalentes au tableau suivant, qui donne $r_i^\varepsilon(x_i)$ en fonction de ε_{i-1} , ε_i et x_i (avec la convention $\varepsilon_{-1} = \varepsilon_{f-1}$).

		ε_i	
		0	1
0		x_i	$p - 2 - x_i$
	$i = 0$	$x_0 - 1$	$p - 1 - x_0$
1	$i \neq 0$	$x_i + 1$	$p - 3 - x_i$

On remarque en particulier que la transformation à appliquer à la i -ième composante x_i ne dépend que des valeurs de ε_{i-1} et ε_i .

Pour h dans $\llbracket 1; p^f \rrbracket$, on note $r^\varepsilon(h)$, ou simplement r^ε , le f -uplet obtenu en appliquant la transformation r^ε au poids initial. Le lemme suivant se vérifie facilement.

LEMME 2.1. *Pour tout h dans $\llbracket 1; p^f \rrbracket$ et tout ε dans $\{0, 1\}^f$, le f -uplet d'entiers $r^\varepsilon(h)$ est dans $\llbracket -1; p - 1 \rrbracket^f$ et satisfait la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$.*

On en déduit que, si $r^\varepsilon(h)$ est dans $\llbracket 0; p - 1 \rrbracket^f$, alors la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ a une (unique) solution dans $\llbracket 0; p - 1 \rrbracket^f$. Dans ce cas, cette solution (c'est-à-dire, le poids de Serre de $\bar{\rho}$ associé à ε) est $r^\varepsilon(h)$.

Lorsque la représentation $\bar{\rho}$ est générique, on vérifie que, pour tout mot ε , le f -uplet $r^\varepsilon(h)$ est dans $\llbracket 0; p - 2 \rrbracket^f$. On en déduit que les poids de Serre de $\bar{\rho}$ sont donnés par les f -uplets $r^\varepsilon(h)$, ε décrivant $\{0, 1\}^f$, et que tous ces poids sont réguliers (définition 1.4).

2.3. Formules non génériques et poids de Serre modifiés.

2.3.1. *Poids modifiés : définition.* Lorsque la représentation $\bar{\rho}$ est non générique, elle peut avoir des poids de Serre qui ne sont pas donnés par les formules génériques de la partie précédente; on choisit d'appeler de tels poids les poids *modifiés*.

DÉFINITION 2.2 (Poids de Serre modifié). Soit $r = (r_0, \dots, r_{f-1})$ dans $\llbracket 0; p - 1 \rrbracket^f$ un poids de Serre de $\bar{\rho}$ et ε dans $\{0, 1\}^f$ un mot tel que r est solution de la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) r est différent de $r^\varepsilon(h)$;
- (2) il existe i dans $\llbracket 0; f - 1 \rrbracket$ tel que $r_i^\varepsilon(h)$ est égal à -1 .

Un poids de Serre qui vérifie ces conditions est dit *modifié* (pour $\bar{\rho}$ et ε).

REMARQUE 2.3. On verra dans la partie 2.4 que cette notion dépend non seulement de la représentation $\bar{\rho}$, mais aussi du mot ε .

2.3.2. *Formules modifiées.* Les formules génériques de la partie 2.2 doivent maintenant être généralisées, afin d'obtenir tous les poids de Serre, modifiés ou non.

Le mot ε étant fixé, on définit l'algorithme de « modification » d'un f -uplet d'entiers (x_0, \dots, x_{f-1}) de \mathbb{Z}^f de la manière suivante pour l'indice i (avec la convention $f = 0$ pour les indices).

- (1) On remplace x_i par $x_i + \xi_i p$ où :
 - ★ si x_i est dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket$, $\xi_i = 0$;
 - ★ si x_i est strictement négatif, $\xi_i = 1$;
 - ★ si x_i est supérieur ou égal à p , $\xi_i = -1$;
- (2) On remplace x_{i+1} par $x_{i+1} + \eta_i \xi_i (-1)^{\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}}$, où :
 - ★ si $i \in \llbracket 0; f-2 \rrbracket$, $\eta_i = -1$;
 - ★ si $i = f-1$, $\eta_i = 1$.
- (3) On passe à l'indice $i+1$.

LEMME 2.4. *La classe modulo $p^f + 1$ de l'entier $\sum_{i=0}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^i (1 + x_i)$ est préservée par l'application de l'algorithme de modification.*

THÉORÈME 2.5. *Soit ε dans $\{0; 1\}^f$. La congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ admet une solution dans l'ensemble $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$ si et seulement si en partant du f -uplet $r^\varepsilon(h)$ à l'indice 0 et en appliquant au plus $2f-1$ pas de l'algorithme de modification, on obtient un f -uplet r dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$. Lorsque c'est le cas, r est le poids de Serre de \bar{p} qui est l'unique solution de $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$.*

DÉMONSTRATION. On suppose d'abord que l'algorithme de modification donne, à partir du f -uplet $r^\varepsilon(h)$, un f -uplet r dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$. Comme la classe modulo $p^f + 1$ de l'entier $\sum_{i=0}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^i (1 + x_i)$ est préservée par l'application de l'algorithme et que $r^\varepsilon(h)$ satisfait la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$, on en déduit que $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ admet la solution r dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$ (qui est unique). Ceci démontre un des sens de l'équivalence.

Pour démontrer l'autre sens, on raisonne par contraposée. On suppose donc qu'après $2f-1$ pas de l'algorithme, le f -uplet obtenu n'est pas dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$. On va démontrer que la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ n'a pas de solution, c'est-à-dire que h est congru à la valeur défendue D_ε modulo $p^f + 1$.

On remarque qu'on peut écrire

$$D_\varepsilon = 1 + \sum_{i=0}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^{i+1-\varepsilon_i} \equiv \sum_{i=0}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^i (1 + z_i) \pmod{p^f + 1}$$

avec

$$z_0 = \begin{cases} p & \text{si } \varepsilon_0 = 0 \\ -1 & \text{si } \varepsilon_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in \llbracket 1; f-1 \rrbracket, z_i = (1 - \varepsilon_i)(p-1) = \begin{cases} p-1 & \text{si } \varepsilon_i = 0 \\ 0 & \text{si } \varepsilon_i = 1 \end{cases}.$$

On a également l'autre écriture :

$$D_\varepsilon \equiv \sum_{i=0}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^i (1 + \bar{z}_i) \pmod{p^f + 1}$$

avec

$$\bar{z}_0 = \begin{cases} -1 & \text{si } \varepsilon_0 = 0 \\ p & \text{si } \varepsilon_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et } \forall i \in \llbracket 1; f-1 \rrbracket, \bar{z}_i = \varepsilon_i(p-1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon_i = 0 \\ p-1 & \text{si } \varepsilon_i = 1 \end{cases}.$$

Les $2f-1$ étapes de l'algorithme de modification que l'on considère sont codées par une suite dans $\{0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}^{2f-2}$ qu'on note $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{f-1}, \xi'_0, \xi'_1, \dots, \xi'_{f-2})$. On rappelle que la notation $(r_0^\varepsilon(h), r_1^\varepsilon(h), \dots, r_{f-1}^\varepsilon(h))$ désigne le f -uplet obtenu en appliquant les formule génériques pour ε à h .

Pour les f premières étapes de l'algorithme, on introduit les notations suivantes :

- à l'indice 0
 - ★ $x_0 = r_0^\varepsilon(h) \in \llbracket -1; p-1 \rrbracket$
 - ★ $y_0 = x_0 + \xi_0 p \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ avec $\begin{cases} \xi_0 = 0 & \Leftrightarrow x_0 \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket \\ \xi_0 = 1 & \Leftrightarrow x_0 = -1 \end{cases}$
- pour tout indice i dans $\llbracket 1; f-1 \rrbracket$
 - ★ $x_i = r_i^\varepsilon(h) - \xi_{i-1}(-1)^{\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i} \in -\xi_{i-1}(-1)^{\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i} + \llbracket -1; p-1 \rrbracket \subseteq \llbracket -2; p \rrbracket$
 - ★ $y_i = x_i + \xi_i p \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ avec $\begin{cases} \xi_i = 0 & \Leftrightarrow x_i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket \\ \xi_i = -1 & \Leftrightarrow x_i = p \\ \xi_i = 1 & \Leftrightarrow x_i \in \{-1, -2\} \end{cases}$
- à l'indice 0 : $x'_0 = y_0 + \xi_{f-1}(-1)^{\varepsilon_{f-1}+\varepsilon_0} \in \xi_{f-1}(-1)^{\varepsilon_{f-1}+\varepsilon_0} + \llbracket 0; p-1 \rrbracket \subseteq \llbracket -1; p \rrbracket$.

Pour ces f premières étapes, on obtient donc comme f -uplets d'entiers vérifiant $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$:

- à l'indice 0 : $(y_0, x_1, r_2^\varepsilon(h), \dots, r_{f-1}^\varepsilon(h))$;
- pour tout indice i dans $\llbracket 1; f-2 \rrbracket$: $(y_0, y_1, \dots, y_i, x_{i+1}, r_{i+2}^\varepsilon(h), \dots, r_{f-1}^\varepsilon(h))$;
- à l'indice $f-1$: $(x'_0, y_1, \dots, y_{f-1})$.

Pour les $f-1$ étapes suivantes, on introduit des notations semblables :

- à l'indice 0 : $y'_0 = x'_0 + \xi'_0 p \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ avec $\begin{cases} \xi'_0 = 0 & \Leftrightarrow x'_0 \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket \\ \xi'_0 = -1 & \Leftrightarrow x'_0 = p \\ \xi'_0 = 1 & \Leftrightarrow x'_0 = -1 \end{cases}$
- pour tout indice i dans $\llbracket 1; f-2 \rrbracket$
 - ★ $x'_i = y_i - \xi'_{i-1}(-1)^{\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i} \in -\xi'_{i-1}(-1)^{\varepsilon_{i-1}+\varepsilon_i} + \llbracket 0; p-1 \rrbracket \subseteq \llbracket -1; p \rrbracket$
 - ★ $y'_i = x'_i + \xi'_i p \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket$ avec $\begin{cases} \xi'_i = 0 & \Leftrightarrow x'_i \in \llbracket 0; p-1 \rrbracket \\ \xi'_i = -1 & \Leftrightarrow x'_i = p \\ \xi'_i = 1 & \Leftrightarrow x'_i = -1 \end{cases}$
- à l'indice $f-1$:
 - ★ $x'_{f-1} = y_{f-1} - \xi'_{f-2}(-1)^{\varepsilon_{f-2}+\varepsilon_{f-1}} \in -\xi'_{f-2}(-1)^{\varepsilon_{f-2}+\varepsilon_{f-1}} + \llbracket 0; p-1 \rrbracket \subseteq \llbracket -1; p \rrbracket$.

Pour tout i dans $\llbracket 0; f-2 \rrbracket$, la $(f+i+1)$ -ième étape de l'algorithme donne donc le f -uplet d'entiers $(y'_0, \dots, y'_i, x'_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_{f-1})$ comme solution de la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$.

On a supposé que le f -uplet obtenu après la $(2f-1)$ -ième étape n'est pas dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$. Or, ce f -uplet est $(y'_0, \dots, y'_{f-2}, x'_{f-1})$ et, par construction, $y'_0, y'_1, \dots, y'_{f-2}$ sont dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket$. On en déduit que x'_{f-1} vaut -1 ou p (en particulier $\xi'_{f-2} \neq 0$).

De plus, s'il existe un indice i dans $\llbracket 0; f-2 \rrbracket$ tel que x'_i est dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket$, alors on a $\xi'_i = 0$, ce qui implique $x'_{i+1} = y_i$, qui est dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket$, donc on a aussi $\xi'_{i+1} = 0$. Par récurrence, ceci donne $\xi'_{f-2} = 0$, ce qui n'est pas réalisé.

On en déduit : $\forall i \in \llbracket 0; f-1 \rrbracket, x'_i \in \{-1, p\}$ et $\forall i \in \llbracket 0; f-2 \rrbracket, \xi'_i \neq 0$. Le fait que x'_0 soit -1 ou p implique également que ξ_{f-1} est non nul. On a les disjonctions de cas suivantes.

- À l'indice 0 :
 - ★ soit $x'_0 = -1$, alors $y_0 = 0, y'_0 = p-1, \xi'_0 = 1$ et $\xi_{f-1}(-1)^{\varepsilon_0+\varepsilon_{f-1}} = -1$;
 - ★ soit $x'_0 = p$, alors $y_0 = p-1, y'_0 = 0, \xi'_0 = -1$ et $\xi_{f-1}(-1)^{\varepsilon_0+\varepsilon_{f-1}} = 1$.
- En tout indice i entre 1 et $f-2$:
 - ★ soit $x'_i = -1$, alors $y_i = 0, y'_i = p-1, \xi'_i = 1$ et $\xi'_{i-1}(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_{i-1}} = 1$;
 - ★ soit $x'_i = p$, alors $y_i = p-1, y'_i = 0, \xi'_i = -1$ et $\xi'_{i-1}(-1)^{\varepsilon_i+\varepsilon_{i-1}} = -1$.
- À l'indice $f-1$:
 - ★ soit $x'_{f-1} = -1$, alors $y_{f-1} = 0$ et $\xi'_{f-2}(-1)^{\varepsilon_{f-2}+\varepsilon_{f-1}} = 1$;
 - ★ soit $x'_{f-1} = p$, alors $y_{f-1} = p-1$ et $\xi'_{f-2}(-1)^{\varepsilon_{f-2}+\varepsilon_{f-1}} = -1$.

En particulier, y_{f-1} (comme tous les y_0, \dots, y_{f-2}) vaut 0 ou $p-1$. On sait de plus que ξ_{f-1} est non nul; on a donc également :

- ★ soit $\xi_{f-1} = 1$ et $y_{f-1} = p-1$;
- ★ soit $\xi_{f-1} = -1$ et $y_{f-1} = 0$.

On remarque les relations :

- $\xi'_0 = -\xi_{f-1}(-1)^{\varepsilon_0 + \varepsilon_{f-1}}$;
- $\forall i \in \llbracket 1; f-2 \rrbracket, \xi'_i = \xi'_{i-1}(-1)^{\varepsilon_{i-1} + \varepsilon_i}$;
- $\xi_{f-1} = -\xi'_{f-2}(-1)^{\varepsilon_{f-2} + \varepsilon_{f-1}}$.

On en déduit : $\forall i \in \llbracket 1; f-2 \rrbracket, \xi'_i = \xi'_0(-1)^{\varepsilon_0 + \varepsilon_i}$ et $\xi_{f-1} = -\xi'_0(-1)^{\varepsilon_0 + \varepsilon_{f-1}}$.

Il y a donc deux cas possibles.

- Si $\xi'_0(-1)^{\varepsilon_0} = 1$, alors $\xi_{f-1} = -(-1)^{\varepsilon_{f-1}}$ et pour tout i dans $\llbracket 1; f-2 \rrbracket$, $\xi'_i = (-1)^{\varepsilon_i}$.

Les équivalences suivantes sont réalisées :

- ★ $\begin{cases} x'_0 = -1 & \Leftrightarrow & \xi'_0 = 1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_0 = 0 \\ x'_0 = p & \Leftrightarrow & \xi'_0 = -1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_0 = 1 \end{cases}$;
- ★ $\forall i \in \llbracket 1; f-2 \rrbracket, \begin{cases} y_i = 0 & \Leftrightarrow & \xi'_i = 1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_i = 0 \\ y_i = p-1 & \Leftrightarrow & \xi'_i = -1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_i = 1 \end{cases}$;
- ★ $\begin{cases} y_{f-1} = 0 & \Leftrightarrow & \xi_{f-1} = -1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_{f-1} = 0 \\ y_{f-1} = p-1 & \Leftrightarrow & \xi_{f-1} = 1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_{f-1} = 1 \end{cases}$.

- Si $\xi'_0(-1)^{\varepsilon_0} = -1$. Alors $\xi_{f-1} = (-1)^{\varepsilon_{f-1}}$ et pour tout i dans $\llbracket 1; f-2 \rrbracket, \xi'_i = -(-1)^{\varepsilon_i}$.

Les équivalences suivantes sont réalisées :

- ★ $\begin{cases} x'_0 = -1 & \Leftrightarrow & \xi'_0 = 1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_0 = 1 \\ x'_0 = p & \Leftrightarrow & \xi'_0 = -1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$;
- ★ $\forall i \in \llbracket 1; f-2 \rrbracket, \begin{cases} y_i = 0 & \Leftrightarrow & \xi'_i = 1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_i = 1 \\ y_i = p-1 & \Leftrightarrow & \xi'_i = -1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_i = 0 \end{cases}$;
- ★ $\begin{cases} y_{f-1} = 0 & \Leftrightarrow & \xi_{f-1} = -1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_{f-1} = 1 \\ y_{f-1} = p-1 & \Leftrightarrow & \xi_{f-1} = 1 & \Leftrightarrow & \varepsilon_{f-1} = 0 \end{cases}$.

On retrouve dans ces deux cas une des écritures possibles pour D_ε , indiquées au début de la démonstration, à savoir :

$$D_\varepsilon \equiv (-1)^{\varepsilon_0}(1 + x'_0) + \sum_{i=1}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^i (1 + y_i) \pmod{p^f + 1}.$$

Comme le f -uplet $(x'_0, y_1, \dots, y_{f-1})$ vérifie la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$, on en conclut que h est congru à D_ε modulo $p^f + 1$, c'est-à-dire que cette congruence n'a pas de solution dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$. \square

2.3.3. Poids de Serre modifiés : propriétés. On établit dans cette partie quelques propriétés des poids de Serre modifiés.

PROPOSITION 2.6. *Tout poids de Serre modifié est non régulier.*

DÉMONSTRATION. On démontre la contraposée. Soit r' un poids de Serre régulier de \bar{p} et ε dans $\{0, 1\}^f$ tel que r' est solution de $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$. Comme r' est dans $\llbracket 0; p-2 \rrbracket^f$ et r^ε est dans $\llbracket -1; p-1 \rrbracket^f$, on a : $\forall i \in \llbracket 0; f-1 \rrbracket, r_i^\varepsilon - r'_i \in \llbracket -(p-1); p-1 \rrbracket$.

Cet encadrement et le fait que r' et r^ε satisfont la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ impliquent alors l'égalité $\sum_{i=0}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^i (1 + r_i^\varepsilon) = \sum_{i=0}^{f-1} (-1)^{\varepsilon_i} p^i (1 + r'_i)$, dont on déduit finalement que r' et r^ε sont égaux. \square

PROPOSITION 2.7. *On suppose le degré f supérieur ou égal à 2. Toute représentation irréductible non générique possède un poids de Serre modifié (en particulier, non régulier).*

DÉMONSTRATION. Pour f égal à 2, on renvoie aux calculs explicites de la partie 4.1.1. On suppose donc f supérieur ou égal à 3.

Soit i_0 dans $\llbracket 0; f-1 \rrbracket$ tel que la composante r_{i_0} du poids initial de h a une valeur non générique (à savoir 0 ou $p-1$ si i_0 est 0, -1 ou $p-2$ sinon). D'après le tableau définissant r^ε , il existe un unique choix pour le couple $(\varepsilon_{i_0-1}, \varepsilon_{i_0})$ qui donne $r_{i_0}^\varepsilon(h)$ égal à -1 . Il existe 2^{f-2} mots ε avec ces valeurs de $(\varepsilon_{i_0-1}, \varepsilon_{i_0})$. Parmi ces 2^{f-2} mots, il y en a au plus un pour lequel la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ n'a pas de solution. Comme $2^{f-2} - 1$ est supérieur à 1, il existe un mot ε pour lequel la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ a une solution et $r_{i_0}^\varepsilon$ est égal à -1 . Le poids de Serre solution de $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ est alors un poids modifié. \square

COROLLAIRE 2.8. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) $\bar{\rho}$ est générique ;
- (2) tous les poids de Serre de $\bar{\rho}$ sont réguliers ;
- (3) tous les poids de Serre de $\bar{\rho}$ sont non modifiés.

2.4. Multiplicité combinatoire.

DÉFINITION 2.9. Soit σ un poids de Serre de $\bar{\rho}$. On appelle *multiplicité combinatoire* de σ dans $\bar{\rho}$ le nombre de mots ε dans $\{0, 1\}^f$ pour lesquels σ est solution de la congruence $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$.

Lorsque la représentation $\bar{\rho}$ est générique, les formules de §2.2 impliquent que tous ses poids de Serre ont multiplicité combinatoire 1. La situation non générique est plus riche et fait intervenir la notion de poids modifié.

PROPOSITION 2.10. *On suppose que $\bar{\rho}$ est non générique et possède un poids de Serre σ de multiplicité combinatoire m supérieure ou égale à 2. Alors σ est modifié pour au moins $m-1$ des mots ε tels que σ est solution de $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$. En particulier, σ est non régulier.*

DÉMONSTRATION. On suppose par l'absurde que σ est non modifié pour au moins 2 mots distincts ε et ε' . C'est-à-dire que le f -uplet r donnant σ est obtenu à partir de h par les formules génériques de la partie 2.2, pour ε comme pour ε' . En notant $(h_0, h_1, \dots, h_{f-1})$ le poids initial de h , l'observation du tableau générique donne pour tout i dans $\llbracket 0; f-1 \rrbracket$ (avec toujours la convention $-1 = f-1$ pour les indices) :

$$(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = (\varepsilon'_{i-1}, \varepsilon'_i) \text{ ou } \left((\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i) = (1 - \varepsilon'_{i-1}, 1 - \varepsilon'_i) \text{ et } h_i = \begin{cases} \frac{p-1}{2} & \text{si } i = 0 \\ \frac{p-3}{2} & \text{sinon} \end{cases} \right).$$

On en déduit que $(\varepsilon_i)_i = (1 - \varepsilon'_i)_i$ et $h = \frac{p^f+1}{2}$, ce qui contredit le choix de $\bar{\rho}$ non générique. \square

EXEMPLES 2.11.

- (1) Pour le degré f égal à 2, il résulte de l'étude complète de la partie 4.1.1 que toutes les multiplicités combinatoires sont 1, y compris pour les représentations non génériques.
- (2) Pour le degré f égal à 3, le tableau ci-dessous résume tous les représentations ayant au moins un poids de Serre de multiplicité combinatoire supérieure ou égale 2 (à torsion par un caractère de niveau f près). Les entiers r_0 , r_1 et r_2 vérifient ici les conditions du poids initial, c'est-à-dire que r_0 est entre 0 et $p-1$, r_1 et r_2 sont entre -1 et $p-2$.

Poids initial de h	Poids de Serre σ	ε t.q. σ vérifie $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$	σ modifié pour ε et h ?
$(r_0, -1, -1)$	$(r_0, p-1, 0)$	010	non
		001	oui
$(p-1, r_1, -1)$	$(0, r_1+1, p-1)$	101	non
		000	oui
$(p-1, p-2, r_2)$	$(p-1, 0, r_2+1)$	010	non
		100	oui

Lorsque l'entier r_0 , r_1 ou r_2 prend de plus une valeur générique, chacune des représentations du tableau a exactement un poids de multiplicité combinatoire différente de 1 (celui indiqué dans le tableau) et cette multiplicité est 2. De telles représentations ont exactement 7 poids de Serre (au lieu de 8 dans le cas générique).

Lorsque l'entier r_0 , r_1 ou r_2 prend une valeur non générique, on obtient (toujours à torsion par un caractère de niveau f près) trois représentations qui ont au moins 2 poids de Serre de multiplicité combinatoire supérieure ou égale à 2. Chacune de ces représentations a exactement 2 tels poids de Serre, chacun de multiplicité 2, et possède au total 6 poids de Serre distincts.

Poids initial de h	Poids de Serre σ	ε t.q. σ vérifie $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$	σ modifié pour ε et h ?
$(0, -1, -1)$	$(0, p-1, 0)$	010	non
		001	oui
	$(p-1, 0, p-1)$	101	non
		011	oui
$(0, p-2, p-2)$	$(p-1, p-1, 0)$	101	non
		110	oui
	$(0, 0, p-1)$	010	non
		111	oui
$(p-1, p-2, -1)$	$(0, p-1, p-1)$	101	non
		000	oui
	$(p-1, 0, 0)$	010	non
		100	oui

La combinatoire générale pour le degré f quelconque est complexe et implique donc des poids modifiés, ainsi que des conditions subtiles de non généricité pour la représentation $\bar{\rho}$. Dans la partie 4, on se concentre sur le lien entre multiplicités combinatoires, poids modifiés, et de nouveaux phénomènes observés dans la géométrie de certaines variétés de Kisin, en lien avec les anneaux de déformations galoisiennes.

3. Poids de Serre d'un type modéré

On présente dans cette partie une méthode de calcul des multiplicités $m_{\mathbf{v}_0, \mathbf{t}}(\sigma)$ pour les données \mathbf{v}_0 et \mathbf{t} fixées en 1.4. Tout d'abord, le choix de \mathbf{v}_0 égal à $(0, 2)_{\tau \in \mathcal{S}}$ et la formule pour $\sigma(\mathbf{v}_0)$ (§1.2.3) donnent directement $\sigma(\mathbf{v}_0) = \mathbb{1}$. Ainsi, $\sigma(\mathbf{v}_0, \mathbf{t})$ est simplement égal à $\sigma(\mathbf{t})$. On décrit maintenant la représentation $\sigma(\mathbf{t})$ et $\overline{\sigma(\mathbf{t})}$, sa réduction modulo ϖ_E .

Les hypothèses sur les caractères η et η' (modérés et se prolongeant à G_F) impliquent qu'ils se factorisent par le groupe $\text{Gal}(F^{\text{nr}}(\sqrt[p]{p})/F^{\text{nr}})$, isomorphe à k_F^\times . On note encore η et η' les caractères de k_F^\times dans \mathcal{O}_E^\times obtenus ainsi.

On note $I(\mathcal{O}_F)$ le sous-groupe d'Iwahori de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$, formé des matrices dont la réduction modulo p est triangulaire supérieure. On définit un caractère χ de $I(\mathcal{O}_F)$ dans \mathcal{O}_E^\times par (\bar{a} désignant la réduction modulo p de \mathcal{O}_F dans k_F) :

$$\chi : \begin{array}{ccc} I(\mathcal{O}_F) & \longrightarrow & \mathcal{O}_E^\times \\ \begin{pmatrix} a & b \\ pc & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \eta'(\bar{a})\eta(\bar{d}) \end{array}$$

D'après [BM14] (§5.1), $\sigma(\mathbf{t})$ est la représentation induite $\text{Ind}_{I(\mathcal{O}_F)}^{\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \chi$, formée des fonctions g de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ dans E satisfaisant : pour tout (h, x) dans $I(\mathcal{O}_F) \times \text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$, on a $g(hx) = \chi(h)g(x)$. L'action (à gauche) de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ sur l'espace $\text{Ind}_{I(\mathcal{O}_F)}^{\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \chi$ est donnée par translation à droite sur les fonctions. Les fonctions dans $\text{Ind}_{I(\mathcal{O}_F)}^{\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \chi$ dont l'image est contenue dans \mathcal{O}_E forment un \mathcal{O}_E -réseau stable par l'action de $\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)$. Sa réduction modulo ϖ_E , notée $\overline{\sigma(\mathbf{t})}$, est l'induite $\text{Ind}_{I(\mathcal{O}_F)}^{\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \bar{\chi}$, où $\bar{\chi}$ est la réduction de χ modulo ϖ_E .

Les facteurs irréductibles de la représentation semi-simplifiée $\overline{\sigma(\mathbf{t})}^{\text{ss}}$ de $\text{GL}_2(k_F)$ sont donnés explicitement dans [BP12] (§2). On en présente ici une description alternative, qui a pour avantage son analogie avec celle des poids de Serre de la représentation galoisienne $\bar{\rho}$ introduite dans les parties 2.2 et 2.3.2. Elle permet également une estimation du nombre de poids d'un type galoisien général (proposition 3.2)

On note $c = (c_0, \dots, c_{f-1})$ l'unique f -uplet dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket$ vérifiant : $\bar{\eta} = \omega_f^{\sum_{i=0}^{f-1} p^i c_i} \bar{\eta}'$. L'hypothèse que les caractères η et η' sont distincts implique que c est différent de $(0, \dots, 0)$ et $(p-1, \dots, p-1)$.

Soit ε un mot dans $\{0, 1\}^f$. On définit un f -uplet $\lambda^\varepsilon(c) = (\lambda_0^\varepsilon(c_0), \dots, \lambda_{f-1}^\varepsilon(c_{f-1}))$ dans $\llbracket -1; p-1 \rrbracket^f$ par la formule et le tableau équivalent suivants (les indices i vivant modulo f) :

$$\forall i \in \llbracket 0; f-1 \rrbracket, \lambda_i^\varepsilon(c_i) = (-1)^{\varepsilon_i} (c_i - \varepsilon_{i-1}) + \varepsilon_i (p-2)$$

	ε_i	0	1
ε_{i-1}		c_i	$p-2-c_i$
0		c_i-1	$p-1-c_i$
1		c_i	$p-2-c_i$

On vérifie également que le nombre rationnel

$$s^\varepsilon(c) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \left(\varepsilon_{f-1} (p^f - 1) + \sum_{i=0}^{f-1} p^i (c_i - \lambda_i^\varepsilon(c_i)) \right)$$

est entier. Si le f -uplet $\lambda^\varepsilon(c)$ est dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$, on définit un poids de Serre $c^\varepsilon(\mathbf{t})$ par la formule :

$$c^\varepsilon(\mathbf{t}) \stackrel{\text{déf}}{=} (\lambda_0^\varepsilon(c_0), \dots, \lambda_{f-1}^\varepsilon(c_{f-1})) \otimes \det^{s^\varepsilon(c)} \cdot (\bar{\eta}' \circ \det).$$

Pour tout poids de Serre σ , on note $m_{\mathbf{t}}(\sigma)$ (au lieu de $m_{\mathbf{v}_0, \mathbf{t}}(\sigma)$) la multiplicité de σ dans la semi-simplifiée $\overline{\sigma(\mathbf{t})}^{\text{ss}}$ et $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ (au lieu de $\mathcal{D}(\mathbf{v}_0, \mathbf{t})$) l'ensemble des poids de Serre qui apparaissent dans cette semi-simplifiée.

LEMME 3.1 ([BP12], lemme 2.2).

- (1) L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ est formé des poids $c^\varepsilon(\mathbf{t})$, lorsque ε parcourt les mots de $\{0, 1\}^f$ pour lesquels $\lambda^\varepsilon(c)$ est dans $\llbracket 0; p-1 \rrbracket^f$.
- (2) La multiplicité $m_{\mathbf{t}}(\sigma)$ vaut 1 si σ est dans $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ (et 0 sinon).

Lorsque tous les entiers c_i sont compris entre 1 et $p-2$, l'ensemble $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ comporte donc exactement 2^f poids de Serre, calculables par les formules explicites ci-dessus. Les types galoisiens pour lesquels le f -uplet c possède des composantes « non génériques » (c'est-à-dire, égales à 0 ou $p-1$) possèdent strictement moins de 2^f poids de Serre (on note l'analogie avec le cas des représentations galoisiennes non génériques).

PROPOSITION 3.2. *Soit \mathbf{t} un type galoisien comme ci-dessus pour lequel (c_0, \dots, c_{f-1}) possède au moins une composante égal à 0 ou $p-1$. Alors le cardinal de $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ est compris entre 1 et $2^f - 2^{f-2}$.*

DÉMONSTRATION. Soit i un indice tel que c_i est non générique. D'après le tableau ci-dessus, il existe exactement un choix de $(\varepsilon_{i-1}, \varepsilon_i)$ pour lequel $\lambda_i^\varepsilon(c_i)$ vaut -1 . \square

On renvoie à la partie suivante (en particulier §4.2) pour des exemples.

4. Anneaux de déformations, variétés de Kisin et poids modifiés : exemples

Cette dernière partie est consacrée à des exemples pour de petits degrés du corps F . Lorsque ce degré est égal à 2, on décrit toutes les représentations irréductibles non génériques, leurs poids de Serre et les types galoisiens modérés de niveau f avec lesquels elles ont des poids en commun. Pour les degrés 2 et 3, on illustre le lien entre les propriétés des poids de Serre mises en évidence dans les parties 2.3, 2.4, 3 et la géométrie des espaces de déformations galoisiennes.

4.1. En degré $f = 2$. On étudie dans cette partie les représentations irréductibles $\bar{\rho}$ du groupe de Galois absolu de $F = \mathbb{Q}_{p^2}$. La situation générique est bien comprise : voir [BM14], théorème 5.2.1, pour le calcul des anneaux $R^\psi(\mathbf{v}_0, \eta \oplus \eta', \bar{\rho})$ et des multiplicités intrinsèques $(m_{\bar{\rho}}(\sigma))_{\sigma \in \mathcal{D}(\bar{\rho})}$. On se concentre donc ici sur le cas des représentations non génériques.

4.1.1. *Représentations irréductibles non génériques pour \mathbb{Q}_{p^2} .* Toute représentation de G_F sur k_E , de dimension 2 et irréductible, est de la forme

$$\bar{\rho} \simeq \text{Ind}_{G_{F'}}^{G_F} \left(\omega_4^{1+r_0+p(1+r_1)} \cdot \text{nr}'(\theta) \right) \otimes \omega_2^d,$$

pour θ un élément de k_E^\times , et des entiers r_0 entre 0 et $p-1$, r_1 entre -1 et $p-2$ et d dans \mathbb{Z} .

Les représentations non génériques sont celles pour lesquelles au moins l'un des deux entiers (r_0, r_1) est égal à une borne de l'intervalle dans lequel il varie. Elles se répartissent en quatre sous-cas, indiqués dans la liste ci-dessous. Pour chaque sous-cas, on donne les poids de Serre de la représentation, calculés à l'aide des formules de la partie 2.3.2.

On constate que chacune des représentations non génériques $\bar{\rho}$ dans la liste ci-dessous a exactement un poids de Serre modifié (r_0, r_1) , dont le symétrique $(p-1-r_0, p-1-r_1)$ est également un poids de Serre de $\bar{\rho}$ (non modifié). On ordonne les poids en commençant par le poids modifié, puis son symétrique, et enfin les autres poids non modifiés.

- (i) $\bar{\rho} \simeq \text{Ind}_{G_{F'}}^{G_F} \left(\omega_4^{1+r_0} \cdot \text{nr}'(\theta) \right) \otimes \omega_2^d$ avec $1 \leq r_0 \leq p-2$;
- $$\mathcal{D}(\bar{\rho}) = \left\{ \begin{array}{ll} (r_0+1, p-1) \otimes \det^{-1} & , \quad (p-2-r_0, 0) \otimes \det^{-(p-1-r_0)} \\ (p-1-r_0, p-2) \otimes \det^{r_0} & , \quad (r_0-1, p-1) \otimes \mathbf{1} \end{array} \right\} \otimes \det^d.$$

- (ii) $\bar{\rho} = \text{Ind}_{G_{F'}}^{G_F} (\omega_4 \cdot \text{nr}'(\theta)) \otimes \omega_2^d$;
 $\mathcal{D}(\bar{\rho}) = \left\{ (1, p-1) \otimes \det^{-1}, (p-2, 0) \otimes \det^{-(p-1)}, (p-1, p-2) \otimes \mathbf{1} \right\} \otimes \det^d$.
- (iii) $\bar{\rho} \simeq \text{Ind}_{G_{F'}}^{G_F} \left(\omega_4^{p(2+r_1)} \cdot \text{nr}'(\theta) \right) \otimes \omega_2^d$ avec $0 \leq r_1 \leq p-3$;
 $\mathcal{D}(\bar{\rho}) = \left\{ \begin{array}{ll} (p-1, r_1+2) \otimes \det^{-p} & , \quad (0, p-3-r_1) \otimes \det^{p-1+p(1+r_1)}, \\ (p-2, p-2-r_1) \otimes \det^{p(1+r_1)} & , \quad (p-1, r_1) \otimes \mathbf{1} \end{array} \right\} \otimes \det^d$.
- (iv) $\bar{\rho} \simeq \text{Ind}_{G_{F'}}^{G_F} (\omega_4^p \cdot \text{nr}'(\theta)) \otimes \omega_2^d$;
 $\mathcal{D}(\bar{\rho}) = \left\{ (p-1, 1) \otimes \det^{-p}, (0, p-2) \otimes \det^{p-1}, (p-2, p-1) \otimes \mathbf{1} \right\} \otimes \det^d$.

Dans les cas (i) et (iii) de la liste ci-dessus, un seul des deux entiers (r_0, r_1) prend une valeur non générique, à savoir 0 ou $p-1$ pour r_0 et -1 ou $p-2$ pour r_1 . Dans les cas (ii) et (iv), les entiers r_0 et r_1 sont tous les deux non génériques et nous appelons *totalelement non génériques* les représentations associées. On remarque que ces représentations totalement non génériques n'ont que trois poids de Serre. Cela tient au fait qu'une des congruences $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$ n'a pas de solution, comme évoqué dans la partie 2.1. Avec les notations de cette partie, on a en effet $D_{00} \equiv p \pmod{p^2+1}$ et $D_{01} \equiv 1 \pmod{p^2+1}$. On constate également qu'aucun poids de Serre n'est solution de plusieurs congruences $\mathcal{C}_\varepsilon(h)$, c'est-à-dire que toutes les multiplicités combinatoires (§2.4) sont 1.

4.1.2. *Types inertiels impliqués.* D'après la forme de la conjecture de Breuil-Mézard et les résultats de [GK14], les types galoisiens pour lesquels l'énoncé de la conjecture de Breuil-Mézard fournit des informations sur les multiplicités intrinsèques d'une représentation $\bar{\rho}$ sont exactement ceux pour lesquels l'intersection $\mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}(\bar{\rho})$ est non vide. La représentation (irréductible) non générique $\bar{\rho}$ étant fixée, on recherche donc les types \mathbf{t} somme de deux caractères distincts, modérés et de niveau f , ayant des poids de Serre en commun avec $\bar{\rho}$.

Pour un tel type $\mathbf{t} = \eta \oplus \eta'$, on note c_0 et c_1 les entiers entre 0 et $p-1$ vérifiant $\bar{\eta} = \omega_2^{c_0+pc_1} \bar{\eta}'$. D'après la partie 3, les poids de Serre dans $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ sont les constituants de $\text{Ind}_{\mathbf{1}(\mathcal{O}_F)}^{\text{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \bar{\eta}' \otimes \bar{\eta}$ et sont donnés par les couples de $\llbracket 0, p-1 \rrbracket^2$ qui apparaissent dans la liste :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (c_0, c_1) & ; \quad (p-1-c_0, p-1-c_1) \otimes \det^{c_0+pc_1}; \\ (p-2-c_0, c_1-1) \otimes \det^{c_0+1} & ; \quad (c_0-1, p-2-c_1) \otimes \det^{p(c_1+1)} \end{array} \right\} \otimes \bar{\eta}' \circ \det.$$

Le tableau suivant résume, pour chaque représentation $\bar{\rho}$ irréductible non générique, les types \mathbf{t} tels que $\mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}(\bar{\rho})$ est non vide et précise cette intersection. Le résultat ne dépend que de la restriction de $\bar{\rho}$ au sous-groupe d'inertie I_F et donc pas de θ . On suppose de plus que l'entier d est nul. En effet, le tableau pour la représentation $\bar{\rho} \otimes \omega_2^d$ s'obtient à partir de celui de $\bar{\rho}$ en multipliant η' par ω_2^d et tous les poids dans $\mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}(\bar{\rho})$ par \det^d . Enfin, les ensembles $\mathcal{D}(\eta \oplus \eta')$ et $\mathcal{D}(\eta' \oplus \eta)$ étant égaux, on a choisi arbitrairement un seul parmi ces deux types pour le faire figurer dans le tableau.

Représentation $\bar{\rho} = \text{Ind}_{G_{E'}}^{G_F}(\chi \cdot \text{nr}'(\theta))$		Type $\mathbf{t} = \eta \oplus \eta'$	Poids de Serre dans $\mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}(\bar{\rho})$
$\chi = \omega_4^{1+r_0}$	$0 \leq r_0 \leq p-2$	$\omega_2^{r_0} \oplus \omega_2^{-p}$	$(p-2-r_0, 0) \otimes \det^{1+r_0-p}$ $(p-1-r_0, p-2) \otimes \det^{r_0}$
	$1 \leq r_0 \leq p-2$	$\omega_2^{r_0-p} \oplus \mathbb{1}$	$(p-1-r_0, p-2) \otimes \det^{r_0}$ $(r_0-1, p-1) \otimes \mathbb{1}$
	$0 \leq r_0 \leq p-3$	$\omega_2^{1+r_0-p} \oplus \omega_2^{-1}$	$(r_0+1, p-1) \otimes \det^{-1}$ $(p-2-r_0, 0) \otimes \det^{1+r_0-p}$
$\chi = \omega_4^{p(2+r_1)}$	$-1 \leq r_1 \leq p-3$	$\omega_2^{p(1+r_1)} \oplus \omega_2^{-1}$	$(0, p-3-r_1) \otimes \det^{-1+p(2+r_1)}$ $(p-2, p-2-r_1) \otimes \det^{p(1+r_1)}$
	$0 \leq r_1 \leq p-3$	$\omega_2^{-1+p(1+r_1)} \oplus \mathbb{1}$	$(p-2, p-2-r_1) \otimes \det^{p(1+r_1)}$ $(p-1, r_1) \otimes \mathbb{1}$
	$-1 \leq r_1 \leq p-4$	$\omega_2^{-1+p(r_1+2)} \oplus \omega_2^{-p}$	$(p-1, r_1+2) \otimes \det^{-p}$ $(0, p-3-r_1) \otimes \det^{-1+p(2+r_1)}$

On note que, pour les troisième et sixième lignes du tableau, l'ensemble des poids communs au type et à la représentation est formé de l'unique poids modifié et de son symétrique. Ce sont les seules occurrences du poids modifié, alors que son symétrique apparaît également dans les première et quatrième lignes.

4.1.3. *Lien avec les variétés de Kisin et les anneaux de déformations.* Pour le degré f égal à 2, les anneaux $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ considérés dans la partie 1.4 ont été déterminés dans [CDM14], en lien avec certaines variétés de Kisin $\overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ qui paramètrent des modules de Breuil–Kisin en caractéristique p . Les énoncés finaux de [CDM14] (théorème 4.3.1, corollaire 4.3.3) utilisent les notions introduites dans les parties 2.3 et l'étude exhaustive des parties 4.1.1 et 4.1.2. On les résume rapidement ici, à titre d'illustration du lien profond entre les notions nouvelles introduites dans ce texte et de nouveaux phénomènes géométriques observés dans les espaces de déformations, en lien avec la conjecture de Breuil–Mézard.

Lorsque la représentation $\bar{\rho}$ est non générique mais pas totalement non générique (cas (i) et (iii) de §4.1.1), elle possède 4 poids de Serre : un unique poids modifié σ_m , son symétrique σ_m^s et deux autres poids. On a les équivalences suivantes :

- $\mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{t}) = \emptyset \Leftrightarrow \overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = \emptyset \Leftrightarrow R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = \{0\}$;
- $\sigma_m^s \notin \mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = \text{Spec}(k_E) \Leftrightarrow R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) \simeq \mathcal{O}_E[[X, Y, T]]/(XY+p)$;
- $\sigma_m^s \in \mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) \simeq \mathbb{P}_{k_E}^1 \Leftrightarrow R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) \simeq \mathcal{O}_E[[X, Y, T]]/(XY+p^2)$.

On en déduit que toutes les multiplicités intrinsèques des poids de $\bar{\rho}$ sont égales à 1, sauf lorsque h vaut p ou $p(p-1)$ et que le poids de Serre est σ_m , qui est le poids totalement irrégulier $(p-1, p-1)$: la multiplicité $m_{\bar{\rho}}(\sigma_m)$ est alors encore inconnue.

Lorsque la représentation $\bar{\rho}$ est totalement non générique (cas (ii) et (iv) de §4.1.1), elle possède 3 poids de Serre : un unique poids modifié σ_m , son symétrique σ_m^s et un autre poids σ' . On a les équivalences suivantes :

- $\mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{t}) = \emptyset \Leftrightarrow \overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = \emptyset \Leftrightarrow R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = \{0\}$;
- $\sigma_m^s \in \mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) \simeq \mathbb{P}_{k_E}^1 \Leftrightarrow R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) \simeq \mathcal{O}_E[[X, Y, T]]/(XY+p^2)$;
- $\sigma_m^s \notin \mathcal{D}(\bar{\rho}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{t}) \Leftrightarrow \overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho}) = \text{Spec}(k_E)$.

Dans ce dernier cas, l'anneau $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ reste mystérieux (on sait néanmoins que c'est un sous-anneau strict de $\mathcal{O}_E[[X, Y, T]]/(XY+p)$). On en déduit que les multiplicités intrinsèques du poids modifié et de son symétrique sont égales à 1, alors que la multiplicité du dernier poids σ' (non modifié) est encore inconnue.

4.2. En degré $f = 3$. Une présentation de toutes les situations non génériques possibles pour f égal à 3 s'avérerait très longue. On choisit ici de présenter quelques exemples typiques des représentations $\bar{\rho}$ et des types galoisiens \mathbf{t} ayant strictement moins de 2^f poids de Serre.

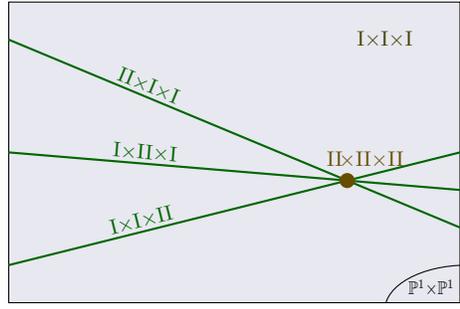
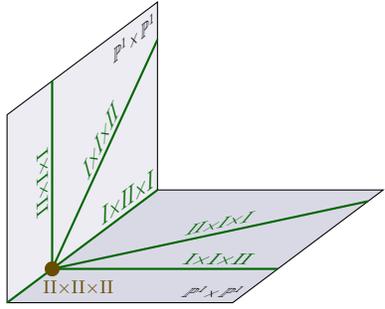
Dans les deux tableaux ci-dessous figurent une représentation $\bar{\rho}$ (sous forme de son poids initial), son nombre de poids total $|\mathcal{D}(\bar{\rho})|$, son nombre de poids modifiés $|\mathcal{D}_m(\bar{\rho})|$, son nombre de poids de multiplicité combinatoire supérieure ou égale à 2 $|\mathcal{D}_{\geq 2}(\bar{\rho})|$, un type galoisien \mathbf{t} (sous forme du f -uplet c), son nombre de poids total $|\mathcal{D}(\mathbf{t})|$, le nombre $|\mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}(\bar{\rho})|$ de poids commun à $\bar{\rho}$ et \mathbf{t} , et le nombre de ces poids communs qui sont modifiés ou de multiplicité combinatoire supérieure ou égale à 2. Ces nombres (et les poids qu'ils comptent) ont été obtenus par les formules des parties 2.3.2, 2.4 et 3.

La dernière ligne de chaque tableau indique la variété de Kisin $\overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ associée à $\bar{\rho}$, \mathbf{t} et aux poids de Hodge–Tate potentiellement Barsotti–Tate \mathbf{v}_0 . Ces variétés, munies d'une stratification dans $\{I, II\}^f$, ont été étudiées en détails (équations, composantes irréductibles, connexité...) dans [CDM15], en lien avec les anneaux de déformation $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$. Pour des représentations non génériques, elles sont toutes de dimension 0 (ou vides), alors que les cas non génériques comme ceux présentés ici présentent une géométrie bien plus riche.

L'avant-dernière ligne de chaque tableau donne le nombre de poids de Serre communs à la représentation $\bar{\rho}$ et au type \mathbf{t} , qui sont ceux apparaissant dans l'énoncé de la conjecture de Breuil–Mézard pour les données de déformations $(\bar{\rho}, \mathbf{t}, \mathbf{v}_0)$. Si la conjecture de Kisin sur la valeur des multiplicités intrinsèques (à savoir, que tout poids de Serre σ de $\bar{\rho}$ vérifie $m_{\bar{\rho}}(\sigma) = 1$) est vraie, ce nombre est la multiplicité de Hilbert–Samuel de la fibre spéciale de l'anneau de déformations $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$. Cette avant-dernière ligne sert donc de guide pour la détermination des anneaux $R^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$. Elle permet notamment de distinguer si deux de ces anneaux peuvent être isomorphes, ou de tester la validité de certains candidats explicites.

On observe que, plus la géométrie de la variété de Kisin est élaborée, plus la situation des poids de Serre de $\bar{\rho}$ et \mathbf{t} est dégénérée. On constate également que, dans tous les cas présentés ici où $\overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$ est de dimension non nulle, au moins un des poids de Serre commun à $\bar{\rho}$ et \mathbf{t} est modifié pour $\bar{\rho}$. Enfin, les variétés de Kisin stratifiées peuvent être similaires mais correspondre à des anneaux de déformations différents, comme dans le premier tableau. Cette différence se lit directement sur le nombre de poids communs. Plus profondément, elle reflète des situations différentes pour les poids de Serre de $\bar{\rho}$ et \mathbf{t} : cardinal de $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ d'une part, h congru à une valeur défendue contre poids de $\bar{\rho}$ de multiplicité combinatoire 2 d'autre part.

Représentation $\bar{\rho}(h)$	$(p-1, p-3, p-2) \equiv D_{110}$	$(p-1, p-2, r_2)$
$ \mathcal{D}(\bar{\rho}) $	7	7
$ \mathcal{D}_m(\bar{\rho}) $	3	3
$ \mathcal{D}_{\geq 2}(\bar{\rho}) $	0	1
Type galoisien $\mathbf{t}(c)$	$(p-1, p-1, p-2)$	$(0, 1, p-3-r_2)$
$ \mathcal{D}(\mathbf{t}) $	4	6
$ \mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}_{\geq 2}(\bar{\rho}) $	0	1
$ \mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}_m(\bar{\rho}) $	1	2
$ \mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}(\bar{\rho}) $	2	3
$\overline{\mathcal{GR}}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$		

Représentation $\bar{\rho}(h)$	$(0, -1, r_2)$	$(p-1, -1, -1)$
$ \mathcal{D}(\bar{\rho}) $	7	6
$ \mathcal{D}_m(\bar{\rho}) $	3	4
$ \mathcal{D}_{\geq 2}(\bar{\rho}) $	1	2
Type galoisien $\mathbf{t}(c)$	$(p-1, 0, p-2-r_2)$	$(0, 0, p-1)$
$ \mathcal{D}(\mathbf{t}) $	5	4
$ \mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}_{\geq 2}(\bar{\rho}) $	1	2
$ \mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}_m(\bar{\rho}) $	1	2
$ \mathcal{D}(\mathbf{t}) \cap \mathcal{D}(\bar{\rho}) $	5	4
$\overline{GR}^\psi(\mathbf{v}_0, \mathbf{t}, \bar{\rho})$		

Bibliographie

- [BDJ10] Kevin Buzzard, Fred Diamond, and Frazer Jarvis, *On Serre’s conjecture for mod ℓ Galois representations over totally real fields*, Duke Math. J. **155** (2010), no. 1, 105–161. MR 2730374
- [BM02] Christophe Breuil and Ariane Mézard, *Multiplicités modulaires et représentations de $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ et de $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Q}_p)$ en $l = p$* , Duke Math. J. **115** (2002), no. 2, 205–310, Avec un appendice de Guy Henniart. MR 1944572 (2004i:11052)
- [BM14] ———, *Multiplicités modulaires raffinées*, Bull. Soc. Math. France **142** (2014), no. 1, 127–175. MR 3248725
- [BP12] Christophe Breuil and Vytautas Paškūnas, *Towards a modulo p Langlands correspondence for GL_2* , Mem. Amer. Math. Soc. **216** (2012), no. 1016, vi+114. MR 2931521
- [CDM14] Xavier Caruso, Agnès David, and Ariane Mézard, *Un calcul d’anneaux de déformations potentiellement Barsotti–Tate*, soumis (2014), 58 pages, arXiv:1402.2616.
- [CDM15] ———, *Variétés de Kisin stratifiées et déformations potentiellement Barsotti–Tate*, soumis (2015), 46 pages, arXiv:1506.08401.
- [EG14] Matthew Emerton and Toby Gee, *A geometric perspective on the Breuil–Mézarard conjecture*, J. Inst. Math. Jussieu **13** (2014), no. 1, 183–223. MR 3134019
- [GK14] Toby Gee and Mark Kisin, *The Breuil–Mézarard conjecture for potentially Barsotti–Tate representations*, Forum Math. Pi **2** (2014), e1, 56. MR 3292675
- [Kis09] Mark Kisin, *The Fontaine–Mazur conjecture for GL_2* , J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 3, 641–690. MR 2505297 (2010j:11084)
- [Kis10] ———, *The structure of potentially semi-stable deformation rings*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II (New Delhi), Hindustan Book Agency, 2010, pp. 294–311. MR 2827797
- [Mat86] Hideyuki Matsumura, *Commutative ring theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 8, Cambridge University Press, Cambridge, 1986, Translated from the Japanese by M. Reid. MR 879273
- [Paš15] Vytautas Paškūnas, *On the Breuil–Mézarard conjecture*, Duke Math. J. **164** (2015), no. 2, 297–359. MR 3306557

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DE BESANÇON, 16 ROUTE DE GRAY, 25030 BESANÇON CEDEX, FRANCE

E-mail address: david@math.cnrs.fr